

文章编号: 1671-7848(2023)08-0000-16

DOI: 10.14107/j.cnki.kzgc.20230186

## 进化高维多目标优化研究综述

徐康宇<sup>1</sup>, 刘元<sup>1</sup>, 李密青<sup>2</sup>, 杨圣祥<sup>3</sup>, 邹娟<sup>1</sup>, 郑金华<sup>1</sup>

(1. 湘潭大学 计算机学院·网络空间安全学院, 湖南 湘潭 411100; 2. School of Computer Science, Birmingham University, Birmingham B152TT, UK; 3. School of Computer Science and Informatics, De Montfort University, Leicester LE19BH, UK)



**摘要:** 高维多目标优化问题 (Many-objective Optimization Problems, MaOPs) 已经普遍存在于工业和科学领域中, 这类问题的目标数一般超过3个且目标之间存在冲突性, 即一个目标性能的提升可能会导致其它一个或多个目标性能的恶化。目标之间的冲突特性导致MaOPs不存在唯一的最优解, 而是需要获得一组折中解在目标之间进行平衡。进化算法作为一种基于种群的元启发式搜索方法已经被证实能够有效的求解MaOPs, 逐渐成为多目标优化领域的研究热点之一。近20年来, 高维多目标进化算法 (Many-objective Evolutionary Algorithms, MaOEAs) 研究已取得了长足发展, 大量先进的进化理论和评价体系被不断提出和完善。现对进化高维多目标优化 (Evolutionary Many-objective Optimization, EMaO) 的研究进展进行全面的综述, 具体包括: (1) 描述了EMaO的相关理论背景; (2) 分析了EMaO所面临的挑战; (3) 详细讨论了MaOEAs的发展概况; (4) 归纳了MaOPs以及性能指标; (5) 介绍了面对高维目标空间的可视化工具; (6) 总结了MaOEAs在一些领域的应用; (7) 剖析了进化算法在解决MaOPs时所面临的问题和挑战, 并给出未来研究方向的建议。

**关键词:** 进化高维多目标优化; 进化算法; 高维多目标优化问题; Pareto 支配

**中图分类号:** TP301

**文献标识码:** A

### Evolutionary Many-objective Optimization: A Survey

Xu Kangyu<sup>1</sup>, Liu Yuan<sup>1</sup>, Li Miqing<sup>2</sup>, Yang Shengxiang<sup>3</sup>, Zou Juan<sup>1</sup>, Zheng Jinhua<sup>1</sup>

(1. School of Computer Science & School of Cyberspace Security, Xiangtan University, Xiangtan 411100, China; 2. School of Computer Science, Birmingham University, Birmingham B152TT, UK; 3. School of Computer Science and Informatics, De Montfort University, Leicester LE19BH, UK)

**Abstract:** Many-objective optimization problems (MaOPs) widely exist in industrial and scientific fields, where there are more than 3 objectives that are conflicting with each other (i.e., the improvement of the performance in one objective may lead to the deterioration of the performance of some other objectives). Because of the conflict between objectives, there is no unique optimal solution for MaOPs, but a group of compromise solutions need to be obtained to balance between objectives. As a class of population-based optimization algorithms inspired by biological evolution principles evolutionary algorithms have been proved to be effective in solving MaOPs, and have become one of the research hot spots in the field of multi-objective optimization. In the past 20 years, the research on many-objective evolutionary algorithms (MaOEAs) has made great progress, and a large number of advanced evolutionary methods and evaluation systems have been proposed and improved. In this paper, the research progress of evolutionary many-objective optimization (EMaO) is comprehensively reviewed. Specifically, it includes: (1) Describing the relevant theoretical background of EMaO; (2) Analyzing the problems and challenges faced by evolutionary algorithms in solving MaOPs; (3) Discussing the development of MaOEAs in detail; (4) Summarizing MaOPs and performance indicators in detail; (5) Introducing the visualization tools for high-dimensional objective space; (6) Summarizing the application of MaOEAs in some fields, and (7) Providing suggestions for future research in the domain.

**Key words:** Evolutionary Many-objective optimization; Evolutionary algorithm; Many-objective Optimization Problems, Pareto dominance

### 1 引言

随着科学技术的不断发展，高维多目标优化问题（Many-objective Optimization Problems, MaOPs）在工业和科学领域不断涌现，如飞行控制系统的设计<sup>[1]</sup>、电能调度<sup>[2]</sup>、半导体制造<sup>[3]</sup>等。这类问题待处理的优化目标数量一般超过 3 个且目标之间具有一定冲突性。由于目标冲突的性质，MaOPs 通常不存在单个适用于所有目标的最优解，取而代之的是一组折中解来平衡目标之间的冲突性。这种折中解集通常被视为问题的 Pareto 最优解集，而对应的目标向量形成了该问题的 Pareto 前沿。

自 20 世纪 80 年代中期，由 Schaffer<sup>[4]</sup>首次提出使用进化算法解决多目标优化问题（Multi-objective Optimization Problems, MOPs）以来，进化算法求解 MOPs 的研究成为了优化领域研究热点并涌现了大量经典的算法，如 PESA-II<sup>[5]</sup>（Pareto Envelope-based Selection Algorithm II）、SPEA2<sup>[6]</sup>（Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2）和 NSGA-II<sup>[7]</sup>（Nondominated Sorting Genetic Algorithm II）等。这类算法主要采用 Pareto 支配准则来判定解的优越性，已被证实是 MOPs 的有效解决方案。然而，随着优化问题的目标高维化，传统的多目标进化算法（Multi-objective Evolutionary Algorithms，

MOEAs）在求解 MaOPs 时会面临诸多挑战：首先是在收敛性保持方面，传统 MOEAs 的搜索能力在优化 MaOPs 时会产生显著的退化。研究表明 Pareto 非支配解在种群中的比例会随着目标数量的增加而显著增加，最终在求解 MaOPs 过程中优越解的选择几乎是随机的或者是在多样性保持机制的指导下进行的；其次是在分布性保持方面，目标空间随着目标数量呈指数增长，需要使用较大规模的种群来表征 Pareto 前沿，而种群规模的增加会带来优化代价的增加以及决策者选择的负担加剧。因此，目标维度的增加给 MOEAs 生成有限但均匀分布在整个 Pareto 前沿的非支配解集带来了极大的挑战；最后在可视化 Pareto 前沿方面，传统的散点图无法直观地表达出 MaOPs 的 Pareto 前沿，难以为决策者提供有效的决策指导。

本文将从进化高维多目标优化（Evolutionary Many-objective Optimization, EMaO）的相关理论背景以及高维多目标进化算法（Many-objective Evolutionary Algorithms, MaOEAs）的分类和发展概括、测试问题和性能指标、MaOEAs 的实际应用案例等视角对 EMaO 近 20 年来的取得的新发展进行分析和归纳，并基于当前的研究总结出 EMaO 的发展趋势和研究方向。EMaO 现有的研究方向如图 1 所示。

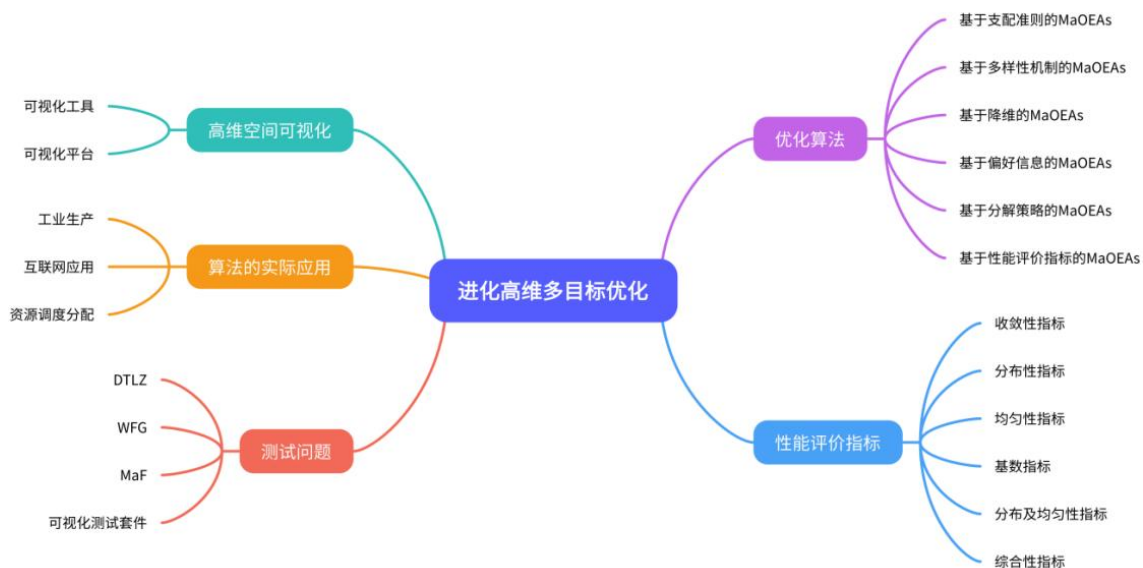


图 1：进化高维多目标优化研究方向

## 2 多目标优化相关理论背景

以最小化问题为例, MOPs 的数学形式如下:

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{x \in R^d} F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ & \text{s.t. } \beta_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, J \\ & \quad \gamma_h(x) = 0, h = 1, \dots, H \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $m$  为目标个数, 当  $m \geq 4$  时称为 MaOPs,  $F(x)$  为 MOPs 的目标向量;  $x$  为  $d$  维决策向量,  $R^d$  为  $x$  的可行域;  $\beta_j(x)$  和  $\gamma_h(x)$  分别表示 MOPs 的不等式约束和等式约束。

定义 1 (Pareto 支配准则): 假设  $x_1$  和  $x_2$  为 MOPs 的两个解, 当且仅当满足公式条件时, 那么解  $x_1$  Pareto 支配解  $x_2$ , 记作  $x_1 \prec x_2$ :

$$\begin{aligned} & \forall i \in (1, 2, \dots, m): f_i(x_1) \leq f_i(x_2) \\ & \wedge \exists i \in (1, 2, \dots, m): f_i(x_1) < f_i(x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

定义 2 (Pareto 最优解): 当决策空间  $R^d$  中不存在任何其它解支配  $x^*$  时, 即  $\neg \exists x \in R^d: x \prec x^*$ , 那么  $x^*$  是该问题的 Pareto 最优解。

定义 3 (Pareto 最优解集): 由所有 Pareto 最优解组成的集合称为 Pareto 最优解集, 定义如下:

$$PS = \{x^* \in R^d \mid \neg \exists x \in R^d: x \prec x^*\} \quad (3)$$

定义 4 (Pareto 最优前沿): Pareto 最优解集在目标空间的映射 (也就是 Pareto 最优解集在目标空间上对应的目标向量集合) 构成 Pareto 最优前沿, 定义如下:

$$PF = \{F(x) \mid x \in PS\} \quad (4)$$

MOPs 的一个重要条件是目标之间存在冲突性, 否则就可以对问题的各个目标进行单独优化。当然, 现实优化问题中也存在一些部分目标之间相互冲突的情况。当前已有研究对目标之间的关系进行了一些分析, 其中最具代表性的定义如下:

定义 5 (目标之间的关系): 假设  $x_1$  和  $x_2$  为 MOPs 的两个解, MOPs 的目标可以通过以下方式关联:

1、如果  $f_i(x_1) \leq f_i(x_2)$  意味着  $f_j(x_1) \geq f_j(x_2)$

时, 则认为  $f_i$  和  $f_j$  之间互相冲突;

2、如果  $f_i(x_1) \leq f_i(x_2)$  意味着  $f_j(x_1) \leq f_j(x_2)$

时, 则认为  $f_i$  和  $f_j$  之间互相支持;

3、如果满足其它条件时, 则认为  $f_i$  和  $f_j$  之间

相互独立。

该定义反应了目标之间的所有可能存在的关系。如定义所示, 当两个目标满足条件 2 和 3 时, 则不存在冲突性, 反之则认为两个目标之间存在冲突。另外, 在很多 MOPs 中目标之间的关系并不一定是全局的, 当比较  $R^d$  的不同子集时, 目标之间的关系可能会发生变化。

## 3 进化高维多目标优化所面临的挑战

“进化高维多目标优化 (EMaO)” 的概念<sup>[8]</sup>于 2002 年首次提出, 并在 2007 年被研究者广泛关注, 至此成为进化计算领域研究热点。本节将对 EMaO 存在的一些难点以及相关工作进行详细的分析。

1) 高维中算法搜索能力退化: 该难点主要针对基于 Pareto 支配的 MOEAs 来说的。这类算法如 SPEA<sup>[9]</sup>和 NSGA-II<sup>[7]</sup>主要依靠 Pareto 支配来提供搜索压力, 然而随着目标数量的增加, 种群中非支配解决方案 (即同等好的解决方案) 的比例会迅速增加<sup>[8]</sup>, 使得算法对于解的 Pareto 选择几乎是随机进行的或者是在多样性标准的指导下进行的难以提供有效收敛压力。因此基于 Pareto 支配的 MOEAs 很难有效逼近真实的 Pareto 前沿, 导致 Pareto 选择机制在求解高维多目标优化问题时失效。

同时, 随着目标维数增加, 基于欧氏距离的多样性度量指标 (如拥挤距离<sup>[7]</sup>或聚类算子<sup>[6]</sup>) 也并不适合用于评价候选解分布的多样性; 常规的性能评价指标也会存在计算时间复杂度过高的问题, 因此如何设计适合求解高维多目标优化问题的多样性评价指标, 进而综合权衡算法求解此类问题的收敛性和多样性尤为重要。

2) Pareto 前沿的维度危机: 随着优化问题的目标维数增加, 表示 Pareto 前沿的解的数量会呈指数增加, 导致算法运行过程中需要庞大的时间和空间开销, 而在现实问题中求解通常要求对函数评估的开销足够小。尽可能地将解集数量控制在 1000 以内<sup>[10][11]</sup>来近似 Pareto 最优前沿。对于高维多目标优化问题来说, 即使算法能够有效地获得 Pareto 前沿的精确数值, 在如此众多的解中选择一个合适解对于决策者来说也是一项艰巨的任务。

3) Pareto 前沿的可视化: 因为 MaOPs 具有三个以上的目标, 它们的 Pareto 前沿无法通过常规方式进行绘制。在高维多目标优化中可视化的研究一直备受关注, 主要原因是可视化在决策者的决策过程中起到了关键作用。平行坐标<sup>[12]</sup>和自组织图<sup>[13]</sup>

是为了简化高维问题的决策而提出的一些方法。但是, 这些方法都不能达到完全直观的展示解集, 因此仍然需要在该领域进行更多的研究。

4)其他难点: 除了以上三个难点外, 研究人员在设计新的 MaOEAs 来解决 MaOPs 时还会面临其它困难。首先对于基于 Pareto 支配的 MOEAs, 当支配关系无效时, 密度估计成为了选择精英解的主要策略<sup>[14]</sup>。但是一些研究<sup>[14][15]</sup>指出因为密度估计偏向于解集的多样性会使得更多的分布均匀但收敛性不足的解被保留, 这对种群的收敛产生了不利的影 响。最终结果是基于 Pareto 支配的算法获得了一组在目标空间中均匀分布但是远离 Pareto 前沿的解。其次, 高维目标空间中收敛性和多样性两个目标之间的冲突加剧, 对算法优化 MaOPs 的过程产生了不利影响<sup>[14][16]</sup>。那些能够在 2 个或 3 个目标问题中实现收敛性和多样性平衡的算法很容易在高维多目标优化中失效。

#### 4 进化高维多目标优化算法研究现状

现实生活中, 大量的工程优化问题可以被描述为 MaOPs, 解决 MaOPs 的算法也得到了很大程度的关注。在过去的二十年里各种 MaOEAs 被提出和改进, 通过以“Many-objective Optimization”为关键字在 Web of Science 数据库检索所得的近 13 年里相关论文数量的变化, 如图 2 所示。

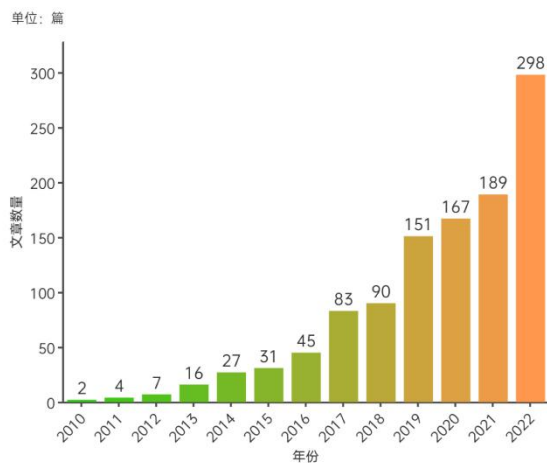


图 2: 高维文章发表趋势

从图 2 中可以发现, 高维多目标优化的研究热度一直处于上升阶段, 已经成为重要的研究领域。现有的 MaOEAs 大致可以分为以下六类: 基于支配准则的 MaOEAs、基于多样性机制的 MaOEAs、基于降维的 MaOEAs、基于偏好信息的 MaOEAs、基于分解策略的 MaOEAs 以及基于性能评价指标的 MaOEAs。

##### 4.1 基于支配准则的算法介绍

由于大多数传统的 MOEAs 中选择压力的损失是由于支配关系影响力减弱所造成的, 因此增强算法收敛性最直观的方法就是修改支配准则。现有的设计新的支配准则的方式, 大体有以下三种:

1) 通过变更支配区域增强算法的选择压力。

2001 年, Ikeda 等发现种群进化过程中存在一类解在某些目标上表现极差但是没有被其它解支配, 并将其定义为支配抵抗解 (Dominance Resistant Solutions, DRS)。这些解导致算法整体的收敛性差, 为此 Ikeda 等提出了  $\alpha$ -支配<sup>[17]</sup>, 当解  $x$  在某个目标上比解  $y$  差, 但其它目标上显著优于解  $y$  时, 该支配准则允许解  $x$  支配解  $y$ ; 2007 年, Sato 等提出了一种新的控制解的非支配区域的方法 CDAS<sup>[18]</sup> (Controlling Dominance Area of Solutions), 可以根据用户自定义的参数来控制解的支配区域的大小, 从而改变解的支配关系; 2011 年, Singh 等提出了一种新的 Pareto 角搜索进化算法 PCSEA<sup>[19]</sup> (Pareto Corner Search Evolutionary Algorithm), 该算法根据解的目标值及 L2 范数进行角排序代替了 Pareto 支配并采用基于非支配解数变化的启发式技术来降低目标维数; 2014 年, Dai 等提出了一种非支配区域收缩方法 CN-dominance<sup>[20]</sup> (Contraction Method) 对解进行排序, 该方法通过修改每个目标的适应度值来收缩目标空间和非支配区域以对解进行排序; 2017 年, Xiang 等提出基于矢量角的算法 VaEA<sup>[21]</sup> (Vector Angle-based Evolutionary Algorithm), 其使用的最大矢量角优先原则在保证解集的宽度和均匀性的同时, 借助更差消去原理可以有效替换掉收敛性更差的解; 2019 年, Tian 等提出了一种新的支配关系 SDR<sup>[22]</sup> (Strengthened Dominance Relation), 并基于候选解之间的角度开发了自适应小生境技术; 2020 年, Liu 等提出了角度优势准则 AD<sup>[23]</sup> (Angle Dominance), 与其它支配关系相比, AD 能够更好的体现种群的分布性。

2) 通过在目标空间中构建网格, 利用网格坐标代替目标值来构建支配关系。

2002 年, Marco 等将  $\epsilon$ -支配<sup>[24]</sup>用于多目标优化中, 在一定程度上解决了 DRS 带来的问题; 2013 年, Yang 等提出了一种基于网格的进化算法 GrEA<sup>[25]</sup> (Grid-based Evolutionary Algorithm), 通过引入网格优势和网格差异的概念来确定网格环境中解的相互关系。

3) 使用模糊逻辑来构建支配关系。

2008 年, Zou 等提出了一个新的最优性定义 L-optimality<sup>[26]</sup>, 并证明了 L-最优解是 Pareto 最优解的子集, L 支配不仅要求支配解在大多数目标上优

于被支配解, 而且需要目标值总和优于该支配解; 2013 年, He 等定义了模糊支配关系 Fuzzy Dominance<sup>[27]</sup>, 其在原始 Pareto 支配的分类上, 通过使用左高斯函数的模糊集量化每个目标的支配程度, 进而达到不断区分解之间支配关系的效果。

基于支配准则的 MaOEAs 通过修改支配准则增加选择压力, 适用于目标维度较高的 MaOPs。该类算法的优势是可扩展性强, 只需根据解之间的相互比较进行选择, 具有较快的响应速度。

## 4.2 基于多样性机制的算法介绍

随着目标维数的增加 Pareto 支配关系的无效性, 使得 MOEAs 的多样性维护机制在进化过程中发挥主导作用, 最终导致一些处于稀疏区域但远离 Pareto 前沿的解获得保留, 降低了算法的有效性。基于此, 一些研究者提出了适应性更强的多样性维持机制, 如 SOD-CNT<sup>[28]</sup> (Sub-Objective Dominance Count)、DM1 (Diversity Management)、DM2<sup>[29]</sup>、SDE<sup>[30]</sup> (Shift-based Density Estimation), 以及 2015 年 Cheng 等提出的一种基于方向多样性和良好收敛性的优化算法 MaOEA-DDFC<sup>[31]</sup> (Directional Diversity and Favorable Convergence), 有效地增强了算法的收敛性和多样性; 2018 年, Liu 等提出了一种具有瓶颈目标学习策略的协同进化粒子群优化算法 CPSO<sup>[32]</sup> (Coevolutionary Particle Swarm Optimization), 多个粒子群以分布式方式共同进化, 以保持算法的多样性, 并开发了一种新的目标学习策略用来提高算法的收敛性; 2020 年, Chen 等出了一种基于可扩展子种群的协方差矩阵自适应进化策略  $S^3-CMA-ES$ <sup>[33]</sup> (Scalable Small Subpopulations based Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy), 其核心思路是将种群拆分为多个小规模子种群, 每个子种群最终收敛于一个解, 实验证明算法在具有 5 - 15 个目标和 500 - 1500 个决策变量的优化问题中性能良好; 2022 年, Xue 等改进 SDE 提出算法 E3A<sup>[34]</sup> (Effective and Efficient Evolutionary Algorithm), 通过有选择地保留进化过程中产生的边界解和非边界解提升了算法的性能; 2022 年, Gu 等结合粒子群算法提出了算法 CCMaPSO<sup>[35]</sup> (Competitive Particle Swarm Optimization Algorithm), 通过基于决策变量划分的多步初始化机制, 将决策变量分组优化并通过竞争学习策略来提高种群的质量; 2022 年, Shen 等提出一种多阶段的进化算法 MaOEA-MS<sup>[36]</sup> (Multistage Evolutionary Algorithm), 在第一个阶段内主要考虑收敛性保证种群迅速接近 Pareto 前

沿, 第二个阶段内通过对决策变量进行聚类分析来强化种群的分布性, 第三阶段再对收敛性和分布性较差的解进行调整。

基于多样性机制的 MaOEAs 旨在通过减少高维环境中传统多样性机制造成的不利影响来提升算法的性能, 其适用于目标维度高, 边界解较少的 MaOPs。

## 4.3 基于降维的相关算法介绍

在 MaOPs 中, 目标之间可能存在一定的相关性, 降维的方法旨在通过处理这类冗余的相关目标<sup>[37]</sup>, 将高维问题转化为低维问题来进行优化。

2009 年, Brockhoff 等研究了 MaOPs 中添加和缩减目标数量所带来的影响, 并提出了目标集之间冲突的一般概念, 基于此, 提出算法 SIBEA<sup>[38]</sup> (Simple Indicator-based Evolutionary Algorithm) 来系统地减少目标的数量; 2012 年, Saxena 等指出即使优化问题的目标数量大于 4 个, 采用目标约简的方法也能有效地提高算法的搜索效率降低计算成本, 据此, 其提出一种基于线性和非线性的目标约简算法 L-PCA<sup>[39]</sup> (Linear objective reduction); 2013 年, Guo 等研究了一种具有冗余目标且可退化为低维 Pareto 最优前沿的特殊的 MaOPs, 提出算法 OC-ORA<sup>[40]</sup> (Objective Reduction Algorithm using Objective Clustering) 通过使用 PAM 聚类来识别冗余目标并去除冲突最小的目标; 2015 年, Li 等提出了一种元目标优化方法 BIGE<sup>[41]</sup> (Bi-goal Evolution), 通过将 MaOPs 转换为关于收敛性和多样性的双目标优化问题, 在此转换的基础上使用 Pareto 支配关系进行处理。

基于降维的 MaOEAs 主要适用于存在冗余目标的 MaOPs, 即去掉某些目标不改变或只轻微的改变解决方案之间的支配关系。该类算法的优势在于能够有效的减少计算负荷, 并且容易与其他方法结合; 不足之处在于当面对没有冗余目标的 MaOPs 时可能无法减少目标数量或者会返回不完整的 Pareto 前沿。

## 4.4 基于偏好信息的相关算法介绍

此外, 也有一些研究者在 Pareto 支配关系的基础上通过引入决策者的偏好信息来修改 Pareto 排序方式, 取得了较好的成果, 如 Zhang 等提出的 ENS<sup>[42]</sup> (Efficient Approach to Nondominated Sorting) 和 AENS<sup>[43]</sup> (Approximate Efficient Non-dominated Sorting Approach); 2012 年, Wang 等提出引入偏好信息的协同进化算法 PICEA-g<sup>[44]</sup> (Preference-inspired Coevolutionary Algorithm),



使得符合决策偏好的候选解拥有更高的适应度,加强了算法的筛选能力;2014年,Zhang等提出了一种基于拐点驱动的进化算法 KnEA<sup>[45]</sup> (Knee Point-driven Evolutionary Algorithm),其核心理念在于考虑到算法没有获取到用户偏好信息时,非支配解的拐点蕴含了非常多的信息能够帮助加速算法的收敛;2014年,Sanghamitra等提出基于相关性目标排序的差分进化算法  $\alpha$ -DEMO<sup>[46]</sup> (Differential Evolution Multiobjective Optimization),该算法基于目标的冲突状态可以周期性地对目标进行重新排序,并选择冲突目标的子集以供进一步处理;2020年,Chen等提出了一种超平面辅助进化算法 hpaEA<sup>[47]</sup> (Hyperplane Assisted Evolutionary Algorithm),通过利用 Pareto 最优前沿的非支配解来构建辅助超平面,进而分类型进行环境选择,保证了算法的选择压力。

基于偏好信息的 MaOEA 适用于计算资源有限且决策偏好清晰的 MaOPs。其优势在于面对需要搜索的高维目标空间,传统的 MaOEA 可能需要非常庞大的种群数量,而基于偏好信息的 MaOEA 可以维持一个较小的种群来针对决策者偏好区域进行搜索。不足在于算法需要经常与决策者进行交互,在决策失误的情况下可能造成严重的误导。

#### 4.5 基于分解策略的相关算法介绍

自基于分解的多目标优化算法 MOEA/D<sup>[48]</sup> (Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition) 出现以来,使用分解策略的 MOEA 在高维多目标领域就一直饱受关注。分解策略的核心思想是将多目标优化问题转化为多个单目标优化子问题协同求解并一次性输出一组 Pareto 最优解。基于分解策略的 MaOEA 相较于基于支配关系的算法优势在于能够更好地解决具有复杂 PS 特性的 MOPs。

基于分解的进化算法在处理 MaOPs 时,性能在很大程度上取决于三个关键因素:目标向量的生成方法、处理收敛性和多样性的策略以及将解与参考向量相关联的方法。在早期的研究进程中,研究者们针对这三个关键因素进行改进,提出了许多基于分解的 MaOEA,如 MSOPS<sup>[49]</sup>、MSOPS-II<sup>[50]</sup>、DBEA-Eps<sup>[51]</sup>、MOEA-DD<sup>[52]</sup>、I-DBEA<sup>[53]</sup>等。

随着研究的深入进行,也衍生出了不少性能更加卓越的算法。2015年,Wang等提出一种基于权重向量的偏好启发式协同进化算法 PICEA-w<sup>[54]</sup> (Preference-inspired Co-evolutionary Algorithms using Weight Vectors),协同进化机制使得算法能

够在优化过程中自适应地构建合适的权重,从而有效地将候选解引向 Pareto 前沿;2016年,Cheng等考虑决策者偏好提出基于参考向量引导的算法 RVEA<sup>[55]</sup> (Reference Vector Guided Evolutionary Algorithm),算法中的参考向量不仅可用于将原始多目标优化问题分为多个单目标子问题,还可以用于体现决策者的个人偏好,算法采用角度惩罚距离的标量化方法来平衡高维目标空间中解的收敛性和多样性;2016年,He等提出了一种具有协调选择策略的算法 MaOEA-CSS<sup>[56]</sup> (Many-objective Evolutionary Algorithms based on Coordinated Selection Strategy),通过考虑父代解组合有效性以及整个种群的表现来进行环境选择;2017年,Cai等提出了具有排序和选择机制的 MOEA/D 新变体 MOEA/D-SAS<sup>[57]</sup> (Decomposition-based Sorting and Angle-based Selection),该算法设计了基于分解的排序策略以保证算法的收敛性,并通过基于角度的选择策略来保证种群的多样性;2017年,Jiang等提出算法 SPEA/R<sup>[58]</sup> (Strength Pareto Evolutionary Algorithm based on Reference Direction),与大多数 MOEA 的解决方案不同,SPEA/R 采用了多样性优先,收敛性第二的选择策略;2018年,Sun等提出了一种基于两个独立阶段的进化算法 MaOEA-IT<sup>[59]</sup> (Independent Two-Stage Approach),通过该算法提出的非支配动态权重聚合方法可以寻找出具有凹形、凸形、线性甚至混合型的 Pareto 前沿的 Pareto 最优解;2018年,Liu等改进 MOEA-D-M2M<sup>[60]</sup> (Multiobjective Optimization Evolutionary Algorithm-based Decomposition) 提出算法 MOEA-AM2M<sup>[61]</sup>,该方法基于解在目标空间的分布情况可以自适应的周期性重置子区域设置,使得搜索工作不会浪费在没有希望的区域上;2018年,Elarbi等提出算法 RPD-NSGA-II<sup>[62]</sup> (RP-dominance-based NSGA-II),使用了基于参考点的支配关系在非支配集中建立了严格的偏序关系,并基于惩罚的边界相交方法提出了新的多样性策略;2022年,Ma等提出了一种基于分解的自适应局部决策变量分析算法 LSMOEA/D<sup>[63]</sup> (Decomposition-based Algorithm using a Localized Control Variable Analysis Approach),主要思想是将参考向量的引导纳入控制变量分析中,并使用自适应策略优化决策变量;2022年,Li等在 MOEA/D 中引入了随机和自适应的权重提出了算法 MOEA/DMS<sup>[64]</sup> (Adaptive Weight Algorithm based on Decomposition and Two-part Update Strategy),并使用了飞蛾搜索算法作为算子,提高了算法的全局搜

索能力。

基于分解的 MaOEAs 适用于解决具有复杂 PS 特性的 MaOPs, 其优势在于能够获得分布更加均匀的解集, 但是如何设计合理有效的权值生成策略依旧有待研究。

#### 4.6 基于性能评价指标的相关算法介绍

由于 MOEA 的性能可能强烈依赖于要解决的问题的 Pareto 前沿形状, 而大多数现有 MOEAs 在 Pareto 前沿形状不同的问题上表现出较差的通用性。Zitzler 等在 2004 年提出基于性能评价指标的多目标优化算法 IBEA<sup>[65]</sup> (Indicator-based Evolutionary Algorithm), 有效的提高了算法的通用性。性能评价指标可以用于权衡候选解的综合性能 (收敛性及分布性), 通过引入决策者构建的性能评价指标即可将 MaOPs 降维成一个单目标优化问题进行求解。基于性能评价指标的 MaOEAs 采用评价指标比较候选解的优劣, 从而增加算法的选择压力, 协助整个算法逼近 Pareto 前沿。现有的基于性能评价指标的 MaOEAs 主要是基于反世代距离 IGD<sup>[66]</sup> (Inverted Generational Distance)、超体积 HV<sup>[67]</sup> (Hypervolume)、以及 R2 指标<sup>[68]</sup>的。

##### 1) 基于单指标的算法

2007 年, Beume 等提出算法 SMS-EMOEA<sup>[69]</sup> (Multiobjective Selection based on Dominated Hypervolume) 便是基于 HV 指标的多目标优化算法, 其核心思想是根据解的 HV 贡献度来评价每个解的适应度; 2011 年, Bader 等提出基于 HV 指标的算法 HypE<sup>[70]</sup> (Fast Hypervolume-based Algorithm), 其使用蒙特卡洛方法来近似 HV 值, 并可以权衡估计的准确性和可用的计算资源, 使得该算法在面对 MaOPs 时可以灵活的调整运行; 2014 年, Ivan 等提出了一种基于 HV 指标的多目标粒子群优化算法 MOPSO<sub>hv</sub><sup>[71]</sup> (Hypervolume-based Multi-objective Particle Swarm Optimizer), 通过使用外部归档集来存储进化过程中的全局非支配解, 并利用归档集中解决方案的超体积贡献值为主种群中每个粒子选择区域和全局最优解; 2018 年, Tian 等提出了一种基于 IGD<sup>+</sup> 指标的算法 AR-MOEA<sup>[72]</sup> (Indicator-based Multiobjective Evolutionary Algorithm with Reference Point Adaptation), 该算法能根据外部存档中候选解决方案的指标贡献度来调整参考点; 2019 年, Sun 等提出了一种基于 IGD 的进化算法 MaOEA/IGD<sup>[73]</sup> (IGD Indicator-based Evolutionary Algorithm), 其核心思想是从每一代中采样均匀分布的参考点用

于计算 IGD 指标并通过设计的秩分配机制来比较解与参考点的支配关系, 以达到同时促进算法收敛性与多样性的目的。

由于 HV 指标所选择的候选解是严格 Pareto 最优的, 在计算负荷和计算精度之间很难取得平衡并且算法计算复杂度会随着目标个数的增加呈指数型增长, 当目标维数大于 6 时, 很难在有效的时间内得到合理的结果<sup>[71]</sup>, 算法的实用性大打折扣。Hansen 等<sup>[74]</sup>提出了计算成本更低的性能评价指标 --R2 指标。

2013 年, DÜng 等提出了一种使用 R2 指标的多目标进化算法 R2-IBEA<sup>[75]</sup> (R2 Indicator based Evolutionary Algorithm), 通过修正 R2 指标中的固有偏差来获得 Pareto 近似解, 在算法收敛的同时克服了 R2 指标对 Pareto 前沿中心偏向更强的特性, 维持了较好的分布性; 2013 年, Gómez 等提出了基于 R2 指标的元启发式算法 MOMB I<sup>[76]</sup> (Many-objective Metaheuristic based on the R2 Indicator), 实验结果表明 MOMB I 与 SMS-EMOA<sup>[69]</sup> 算法产生的结果质量相近但是计算成本降低了很多; 2015 年, Gómez 等改进了 MOMB I 提出版本 MOMB I2<sup>[77]</sup>, 同时考虑了成就标量函数和种群接近 Pareto 前沿的统计信息, 使得算法效能获得提升。

##### 2) 基于多指标的算法

2014 年, Wang 等提出双存档算法 Two\_Arch2<sup>[78]</sup> (Improved Two-archive Algorithm), 该算法使用两个归档集, 一个通过使用  $L_p$  范数来考虑种群的分布性, 另一个通过使用 IBEA 中的  $I_{\epsilon+}$  指标来考虑种群的收敛性; 2016 年, Li 等提出了一种基于多指标的高维多目标优化算法 SRA<sup>[79]</sup> (Stochastic Ranking Algorithm), 采用随机排序技术来平衡 IGD 和 HV 指标的搜索偏差, 并取得了不错的效果; 2017 年, Liu 等提出算法 1by1EA<sup>[80]</sup> (Evolutionary Algorithm using a One-by-one Selection Strategy), 其主要思想是在环境选择中, 基于计算效率高的收敛指标, 逐个选择后代解以增加向 Pareto 最优前沿的选择压力, 在逐个选择中, 一旦一个解被选择中, 就会通过一个分布性指标来评估解之间的相似性并使用小生境技术来保证种群的多样性。

基于性能评价指标的 MaOEAs 优势在于不依赖于 Pareto 支配关系来搜索目标空间, 但是不足在于其计算代价较高, 严重限制了该类算法在高维目标空间的应用。

最后, 我们在 Web of Science 中统计了各类算法近年发表文章的占比情况, 如图 3 所示。

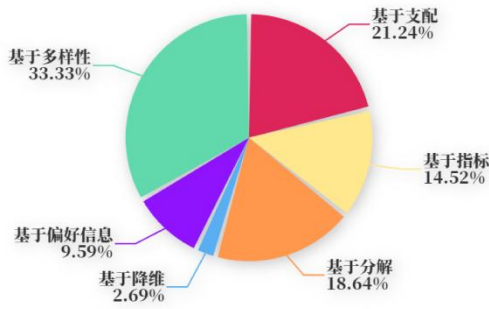


图 3: 各类算法发表文章占比

## 5 测试问题及算法性能评价指标

### 5.1 算法性能评价指标

随着 MaOEAs 的不断提出,如何评价算法的性能好坏也成为了一个重要的研究方向。当算法解决 MaOPs 时,需要通过性能评价指标来量化算法的性能,进而进行算法之间的比较。根据指标的功能, Li 等将它们分为六类<sup>[81]</sup>:收敛性指标、分布性指标、均匀性指标、基数指标、分布性和均匀性结合的指标以及综合性指标。综合性指标包括:IGD<sup>[66]</sup>、IGD<sup>+</sup><sup>[82]</sup>、HV<sup>[67]</sup>、R2<sup>[68]</sup>、ME<sup>[83]</sup>、HD<sup>[84]</sup>等,本文仅对部分 EMaO 中常用的综合性指标进行详细说明。

#### 1) 反世代距离 IGD

Coello 等于 2005 年提出 IGD 指标<sup>[66]</sup>,其通过度量真实 Pareto 前沿与算法所获得的 Pareto 前沿之间的接近程度来评价算法的收敛性和多样性,其公式定义如下:

$$IGD(S,P) = \frac{\sum_{x \in P} \min_{y \in S} d(x,y)}{|P|} \quad (5)$$

其中,  $S$  为由算法获得的最终解集,  $P$  为真实 Pareto 前沿上均匀采样得到的一组参考点的集合,  $d(x,y)$  表示参考点  $x$  到解  $y$  的欧氏距离。因为 IGD 的评价方法是针对  $P$  中的每个参考点,在算法所获解集  $S$  中寻找距离最近的解计算欧氏距离再求和取平均值,所以 IGD 指标不仅能够评价  $P$  和  $S$  之间的接近程度,还可以用于衡量算法求得解集  $S$  的分布性。IGD 指标的值越小即表示算法所求得的解集  $S$  越接近真实的 Pareto 前沿,且解分布越是均匀。IGD 的不足之处在于当设置参考点较少时可能会偏向解集多样性而忽视算法收敛性,得出与实际结果相反的结论。

#### 2) IGD<sup>+</sup> 指标

针对 IGD 指标存在的不足, Ishibuchi 等于 2015 年提出 IGD<sup>+</sup>, 其公式定义如下:

$$IGD^+(S,P) = \frac{d^+}{|P|} \quad (6)$$

其中,  $S$  为由算法获得的最终解集,  $P$  为真实 Pareto 前沿上参考点的集合,  $d^+ = \sqrt{\sum_{i=1}^{|P|} (d_i^+)^2}$ , 对于最小化问题  $d_i^+ = \max_{x \in S} \{x_j - p_j^i, 0\}$ ,  $p^i \in P$ ,  $j \in \{1, \dots, D\}$ ,  $D$  代表决策变量的维数。

#### 3) 超体积 HV

HV 指标<sup>[67]</sup>衡量的是由算法获得的解集在目标空间中所支配的空间大小,该指标可以同时评价算法的收敛性和多样性,其公式定义如下:

$$HV(S,z) = volume\left(\bigcup_{i=1}^{|S|} c^i\right) \quad (7)$$

其中,  $S$  为算法所得解集  $PS$  在目标空间的映射集合,  $z$  为目标空间中的一个参考点,  $c^i$  是由某一非支配解  $x$  与参考点  $z$  作为对角线构成的超立方体。HV 越大说明算法所得到的 Pareto 前沿收敛性越好,分布越均匀。HV 的不足之处在于受参考点影响较大,并且随着优化问题目标维度的增加,计算复杂度急剧上升。

#### 4) R2 指标

Hansen 等于 1998 年首次提出了 R2<sup>[68]</sup> 评价指标。指标 R2 衡量的是解集  $S_1$  优于解集  $S_2$  的预期程度,其公式定义如下:

$$R2(S_1, S_2, U, p) = \int_{u \in U} (u^*(S_1) - u^*(S_2)) p(u) du \quad (8)$$

其中,  $U$  是聚合函数的集合,  $u^*(S_i)$  代表解集  $S_i$  的聚合函数的最大值,  $p(u)$  表示的是聚合函数  $u$  出现的概率。通过给定一组均匀分布的权值向量作为决策者的偏好信息; 加权切比雪夫效用函数作为基数效用函数的典型代表嵌入到 R2 指标中。R2 指标可以评价两个近似 PF 之间的收敛性和多样性。

#### 5) 性能对比指标 PCI

Li 等于 2015 年提出指标 PCI<sup>[85]</sup> (Performance comparison indicator), 其通过使用所有被测试的 Pareto 前沿近似值来构建一个参考集, 并在这个参



考集的基础上评估每个近似值。其支配距离的计算方式如下：

$$D(p, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (p^{(i)} - d(p^{(i)}, Q))^2}$$

$$d(p^{(i)}, Q) = \begin{cases} w, & \text{if } p^{(i)} > w \\ p^{(i)}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

$$w = \min\{q_1^i, q_2^i, \dots, q_k^i\}$$

其中,  $p$  代表目标空间中待评估的解,  $Q$  代表参考点的集合,  $p^{(i)}$  为点  $p$  在第  $i$  个目标维度上的目标值。  $D(p, Q)$  表示的是使得点  $p$  在目标空间中弱支配集合  $Q$  中所有参考点的最小移动距离。

#### 6) 基于网格的指标 Grid-IGD

Cai 等于 2020 年提出指标 Grid-IGD<sup>[86]</sup> (Grid-based IGD), 其通过构建网格系统来计算指标值, 具体的公式如下:

$$d^* = \begin{cases} \min_{s \in GN(r, T, S)} dist^*(r, s), & GN(r, T, S) \neq \emptyset \\ dist^*(r, z^{e-nad}), & GN(r, T, S) = \emptyset \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $dist^*$  为根据弱 Pareto 支配修正的欧几里得距离, 计算方式为:

$$dist^*(r, s) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\max\{(s_i - r_i), 0\})^2} \quad (11)$$

其中,  $r$  表示参考点集  $R$  中的一个参考点,  $S$  表示算法所得解集,  $s_i$  表示  $s$  中的第  $i$  个解,  $T$  代表间距,  $GN(r, T, S)$  表示参考点  $r$  在间距为  $T$  的网格邻域内处于  $S$  解集中的邻居,  $dist^*(r, z^{e-nad})$  表示当  $S$  解集中没有解在参考点  $r$  的网格邻域内时采用的惩罚,  $z^{e-nad}$  表示  $S$  中最接近  $r$  的解。

#### 7) 基于内核的指标 KBI

Cai 等于 2022 年提出了基于内核的指标 KBI<sup>[87]</sup> (Kernel-based indicator), 其采用基于核的最大平均差异可以提取出解集和参考集在收敛性、分布性和均匀性上的特征差别。

$$KBI = MMD(R, S, \sigma) = \left[ \frac{1}{|R|^2} K(R, R, \sigma) + \frac{1}{|S|^2} K(S, S, \sigma) - \frac{2}{|R| \cdot |S|} K(R, S, \sigma) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

该指标使用的高斯核函数如下:

$$k(y, y') = \exp\left(-\frac{\|y - y'\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13)$$

其中,  $R$  代表参考点集,  $S$  代表算法所得解集,  $\sigma$  为高斯核函数中的输入参数。其通过使用  $MMD$ <sup>[88]</sup> 来计算集合  $R$  与  $S$  之间的差异,  $K(R, S, \sigma)$  表示所有参数为  $\sigma$  的  $k(r, s)$  的总和,  $r, s$  分别表示  $R, S$  中的解。

## 5.2 测试问题

多目标优化的测试函数的构造也是多目标优化领域的研究热点之一, 合适的测试函数对分析优化算法的性能, 反映 MOEAs 的有效性十分重要。以下我们对常用的一些测试问题进行简单介绍。

### 1) DTLZ 测试套件

2005 年, Deb 等<sup>[89]</sup> 提出测试问题 DTLZ1-DTLZ9, 该测试套件具有可伸缩性的理想特性, 可以根据决策者的需要设定优化目标的数量。其中 DTLZ1 是一个具有简单线性 Pareto 前沿的优化问题; DTLZ2-DTLZ3 则是利用一个基于球坐标系的函数来确定各点在目标空间的位置; DTLZ4 则在 DTLZ3 的基础上引入了偏置参数, 使得维持目标空间中点的分布性变得更加困难; 在 DTLZ5 和 DTLZ6 中, 对辅助函数进行了轻微修改, 将三个目标问题的帕累托前沿变成包含在目标空间的球面中的曲线; DTLZ7 到 DTLZ9 问题在  $m$  维空间中不再使用球坐标系, DTLZ7 中提出了从决策空间映射到目标空间的简单公式; DTLZ8 和 DTLZ9 则使用了不等式约束。

### 2) WFG 测试套件

2006 年, Huband 等<sup>[90]</sup> 提出测试问题 WFG1-WFG9, WFG 工具包允许测试问题设计者通过一系列可组合的转换来控制哪些特性将出现在测试问题中。为创建一个问题, 测试问题的设计者可以选择了几种形状函数来确定适应度空间的几何形状, 同时可以使用一些便于创建转换向量的转换函数。但是, 转换函数必须仔细设计, 以使底层的适应度空间 (和 Pareto 最优前沿) 保持完整。WFG 工具包提供了各种预定义的形状和转换功能,

以帮助设计者设计测试问题。

### 3) MaF 测试套件

2017 年, Cheng 等<sup>[91]</sup>提出测试问题 MaF1-MaF15。其中 MaF1 是线性的且在任何目标的子集中都没有单一的最优解决方案; MaF2 则是在 DTLZ2 的基础上修改所得, 要求所有的目标必须同时优化, 才能达到真正的 PF; MaF3 则拥有一个凸的 PF; MaF4 则是一个高维多模态的测试问题; MaF5 的大多数 Pareto 最优解集中在一个较小的区域内, 主要用于评测算法是否能够解决分布严重不均的问题; MaF6 主要用于评价算法是否能够解决拥有退化 PF 的优化问题; MaF7 测试问题的主要特点是拥有不连续的 PF; MaF8 的特点则是其在决策空间中的 Pareto 最优区域是个二维流形; MaF9 则是在决策空间中的 Pareto 最优区域是规则的多边形; MaF10 同时拥有凸段和凹段的 PF; MaF11 拥有按比例断开的 PF; MaF12 用于评估 MaOEAs 是否能够处理缩放后的 PF; MaF13 的 PF, 无论目标数量如何变化总是一个单位球; MaF14 与 MaF15 用于评估 MaOEAs 是否能够处理具有复杂适应度函数的问题。

### 4) 可视化测试套件

2014 年, Li 等<sup>[92]</sup>提出矩形问题, 其主要特征在于问题的 Pareto 最优解在双变量决策空间的一个矩形中, 并且在欧几里得几何意义上最优解集的形状与其在四维目标空间中的图像相似, 然而该测试问题只涉及四个目标; 2018 年, Li 等<sup>[93]</sup>提出 ML-DMP 测试套件其 Pareto 最优解, 集中于二维决策空间的规则多边形中, 并且这些解与它们在高维目标空间中的图像相似; 2022 年, Jonathan 等<sup>[94]</sup>提出测试问题 DBMOPP, 其核心思路也是将 Pareto 最优集控制在二维空间的规则多边形中, 并使目标函数表示多边形的每个顶点与解之间的距离, 以达到方便决策者观察与分析的目的。

除了以上介绍的测试问题在算法比较中经常被使用, 还有一些组合问题如背包问题<sup>[95]</sup>、旅行商问题<sup>[96]</sup> (TSP) 以及护士排班问题<sup>[97]</sup>也常被用于多目标优化算法的测试。

## 6 可视化工具

随着 MaOPs 的目标空间维度上升, Pareto 前沿的可视化工作变得十分的困难。现有的高维可视化的技术根据原理不同, 大致可以划分为<sup>[98]</sup>: 基于几何的技术、基于图标的技术、基于图形的技术、基

于层次的技术以及面向像素的技术等。

### 1) 基于几何的技术

基于几何的技术是通过几何画法以及投影的方式来表示数据, 该类方法包括平行坐标法<sup>[99][100]</sup>及散点图法<sup>[101]</sup>等。

目前, 含有平行坐标法的可视化工具软件主要有: Parellel Visual Explorer、XMDV 以及 AVS 等, 该类方法的优点在于当数据集数据项较少, 维度低时, 使用平行坐标系可以清晰的反映每个数据的属性, 便于用户观察和理解。然而随着数据维数及数据量的增大, 坐标轴之间逐渐靠近也会对数据分析造成一定的影响, 并且图形视觉效果模糊难以观测。2017 年, Zhen 等<sup>[102]</sup>通过调整平行坐标方法, 修改优化目标的显示顺序, 实现了在平行坐标中同时反映目标之间的关系以及解之间的 Pareto 支配关系的目的。

散点图<sup>[101]</sup>同样是常见的可视化方法之一, 但该类方法主要用于二维或三维数据。而沿袭了散点图思想的散点图矩阵则能够将高位数据的任意两维画出散点图, 作为散点图矩阵的一部分, 常用于分析高维数据中任意两维之间的关系, 但该方法的局限也恰恰在于不能用于同时发现多个维度之间的关系。

此外, 2019 年, Zhen 等<sup>[103]</sup>提出了基于降维技术的解集可视化技术 ORV, 该方法的基本思想是将解集中的一些目标向量用与其正相关的目标向量来进行分解, 从而实现低维数解集。使用该方法的好处在于能够保持解集中解的分布性与 Pareto 支配关系。

### 2) 基于图标的技术

基于图标的技术通过使用简单的图标来表示数据项, 并将数据项的属性与图标的大小、颜色、形状等特征相关联, 该类方法主要有: 脸谱图法<sup>[104]</sup>、枝形图法<sup>[105]</sup>等。

脸谱图法<sup>[104]</sup>由 Herman 等于 1973 年提出, 其通过轮廓、鼻、眼等特征来表现多维数据。该方法可以帮助用户从大量数据中发现异常并可以根据表情形状对数据进行聚类。枝形图法<sup>[105]</sup>通过选取多维属性中的某两种属性作为 X-Y 轴并使用不同的树枝及倾斜角度来映射其他维度。

### 3) 基于图形的技术

基于图形的技术是利用整个图形来达到可视

来表达高维数据信息的目的，该技术采用的图形既包括折线、曲线、直线等的基本图形，也含有特殊图形如最优对称图和有向无回图等。

进化高维多目标优化中常使用的该类技术的典型代表是盒图，盒图能够直观的显示离散数据的分散情况，其主要由五个数值点组成：最小值、下四分位数、中位数、上四分位数以及最大值。盒图常被用于观察数据的离散程度和异常值。

#### 4) 基于层次的技术

基于层次的可视化技术主要是通过将高维数据空间划分为若干个子空间，然后通过图形来表示以层次结构的方式组织的子空间。基于层次的可视化技术包括：树图<sup>[106]</sup>、维堆<sup>[107]</sup>等。

树图<sup>[106]</sup>可以根据数据的层次结构将屏幕划分为多个子矩形，而矩形的大小则是由其结点大小所确定的，对于每一个划分的子矩形，都可以进行辅之以颜色或文字的说明。树图目前主要适用于观察大量的层次数据集。

维堆<sup>[107]</sup>的基本思想是从高维数据集中选择任意两个维度来构建基础的平面坐标系，然后在平面坐标系中再划分若干个区间形成方格，再到放个中构建第二层坐标系，如此循环直到所有的维度都显示在坐标系中。由于维堆的操作复杂，其只适用于维数不高且离散的数据。

#### 5) 面向像素的技术

前几种技术在可视化海量数据时都存在一定的缺点，而面向像素的技术<sup>[108]</sup>则是目前能有效可视化海量数据的技术。其基本思想是将每个数据项单独对应到一个屏幕窗口，对于不同的数据属性则使用不同的窗口像素来表示，同时显示数据量的多少则取决于屏幕分辨率的大小。

## 7 应用

高维多目标优化算法在科学研究和工程应用中都有广泛的应用前景，本节主要针对高维多目标优化算法的实际应用作详细介绍。

### 7.1 工业生产中的应用

在船舶设计制造行业存在着许多 MOPs，船舶的总体设计需要同时考虑船只型线设计、结构设计、主尺度要素确定等方面的内容。2014 年，Zhang 等<sup>[109]</sup>在考虑船宽、船长、型深、吃水、方形系数和航速等六个变量的基础上设置了运输成本最小、空船重量最小、年货运量最小以及初稳性高在内的四

个优化目标，使用算法 MFEA 成功对船舶的主尺度设计进行了优化并证明了该方法优于现有的其他方法。

航天器的控制系统设计同样是一个经典的高维优化问题，飞机控制系统的稳态误差、调节时间、超调量等相关参数都是有待优化的目标。2005 年，Adra 等<sup>[110]</sup>提出了一种使用逆神经网络的混合多目标进化算法在解决飞行器控制系统设计上取得了一定的研究成果。

增材制造技术是一种通过计算机进行辅助设计并采用材料逐渐累加的方法制造实体零件的技术。2021 年，Marina 等<sup>[111]</sup>在考虑增材制造三维对象的打印方向时，将支架的总接触面积、建造时间、表面粗糙度和表面质量作为优化目标，成功地提出了一种针对鳍形模型构建方向问题的多目标优化方法，帮助决策者在三维模型的方向定义中考虑到多个优化目标。

工业的节能减排管理问题中涉及到大量的存在相互冲突的优化目标，2021 年，Christian 等<sup>[112]</sup>针对中国水泥行业构建了一个包含经济成本低、二氧化碳排放量低、能源消耗低等 10 个优化目标在内的高维优化问题，并使用 NSGA3 算法进行优化，为中国水泥行业的节能减排管理提出了更加科学有效的建议。

管壳式换热器又称列管式换热器。是以封闭在壳体中管束的壁面作为传热面的间壁式换热器。针对换热器的设计，2017 年，Bansi 等<sup>[113]</sup>考虑了换热器总成本、压降和熵发电机数的效率最大化和最小化等四个优化目标，构建了优化问题，并针对该问题提出了多目标传热搜索算法 MOHTS 很好地解决了换热器的设计难题。

在再制造行业中，自动拆卸成为实现经济效益的最有前途的解决方案之一。机器人拆卸线平衡是以工业规模实现自动拆卸的关键问题。2018 年，Fang 等<sup>[114]</sup>提出算法 PBEA 用于优化机器人工作站的拆卸线平衡问题。

### 7.2 互联网行业中的应用

随着工业物联网（IIoT）的迅速发展，区块链技术因为具有分散化、灵活规则 and 良好隐私保护的属性也得到了大量的应用。然而区块链的可伸缩性却造成了一定的限制，2020 年，Bin Cao 等<sup>[115]</sup>通过改进的 Two\_Arch2 算法，以降低区块链的延迟和成本，提高区块链的可伸缩性和分散性为目标，对多

目标区块链的 IIoT 模型进行了求解, 实验结果很好的优化了模型的四个目标。

在大数据环境中, 人们的私人信息很容易被广泛的传播, 如何保护私人信息也面临着巨大的挑战。2019 年, Zhang 等<sup>[16]</sup>提出了一种基于混合精英选择策略的算法框架 MaOEA-AAB, 可以用于制定私人信息保护策略, 从而能够快速、准确、全面地保护私人信息。

软件产品线是指具有一组可管理的公共特性的软件密集型系统的合集, 特征模型是软件产品线中所有可能产品信息的紧凑表示, 最佳特征选择涉及在大且高度受限的搜索空间中同时优化多个(通常多于三个)目标。2018 年, Xiang 等<sup>[17]</sup>通过结合算法 VaEA 以及 SAT 求解器提出了 SATVaEA (Combining Many-objective Optimization and SAT Solvers) 达到了简化特征模型的目的; 同时, 由于测试软件产品线中的所有产品是非常低效的。2020 年, Hierons 等<sup>[18]</sup>提出了一种基于网格的进化策略 GrES 用于选择需要测试的产品并确定产品的测试优先级, 以便测试人员能够尽早地发现故障。

### 7.3 资源调度分配中的应用

在水资源的管理供应模型中如何以最小化的运营成本和能源使用, 去最大程度的提高工程环境指标以及供应的可靠性也是一个有待优化的多目标优化问题。2015 年 Evgenii 等<sup>[19]</sup>将水资源管理模拟器与多目标优化算法相结合, 在供应与需求之间做出权衡使用多目标优化的结果替代了模拟器系统设计的评估指标获得了更好的方案。

## 8 结论与展望

EMaO 在现实生活中有着广泛的应用前景, 而由于 MaOPs 的优化目标数量较多, 传统的优化算法在高维空间中面临着诸多挑战难以完美地解决日渐增多的 MaOPs, 提出适应性更强的 MaOEAs 和相应的测试问题及性能指标成为了研究热点。

本文首先介绍了 EMaO 的相关理论背景及其面临的挑战与难题, 然后综述了现有的 MaOEAs, 并根据求解机制的不同将算法分为了基于支配准则的 MaOEAs、基于多样性机制的 MaOEAs、基于降维的 MaOEAs、基于偏好信息的 MaOEAs、基于分解策略的 MaOEAs 以及基于性能评价指标的 MaOEAs。除此之外本文还对用于评估 EMaO 的测试问题及性能指标进行了详细介绍, 最后, 介绍了高维目标空间的可视化工具并对 MaOEAs 的相关应用案例进行了分析。

通过对 EMaO 领域各个研究方向的总结与分析, 不难得出以下有待进一步研究的问题:

1) 基于支配关系的 MaOEAs 普遍由算法的收敛性与分布性策略着手, 通过设计新的支配准则来解决高维空间下传统优化算法面临的 Pareto 支配失效的问题, 以提高算法的收敛性; 通过完善多样性策略避免 Pareto 支配失效时分布性强但收敛性弱的解被选择, 以减少多样性维持带来的不利影响, 但是随着选择压力的增强, 如何平衡算法的收敛性与多样性的关系依然有待研究;

2) 基于分解策略的 MaOEAs 对问题的特性比较敏感, 如何设计合适的目标向量以及权值调整方法使得算法在面临具有规则与不规则 PF 的 MaOPs 中都能展示较好的性能依然有待进一步的研究;

3) 基于指标的 MaOEAs 在优化目标较少时能够更好地近似 PF, 但是当目标维数增加, 如何设计更合适的指标在降低算法计算成本的同时保证指标衡量解集收敛性与分布性的能力也有待探究;

4) 针对 MaOEAs 的测试问题虽然较为完善, 但目前依旧需要更多的从实际问题中抽象建立的基础模型, 以加快 MaOEAs 的实际应用进程;

5) 高维空间的可视化技术已有较多的基础方法, 但是搭建一个针对 MaOEAs 运行结果的可视化平台, 以帮助决策人员及算法研究人员理解 MaOEAs 优化的结果并进行分析总结也是很重要的发展方向。

## 参考文献(References)

- [1] Adra S F, Hamody A I, Griffin I, et al. A hybrid multi-objective evolutionary algorithm using an inverse neural network for aircraft control system design[C]//2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2005, 1: 1-8.
- [2] Wei-Jian K, Tian-You C, Jin-Liang D, et al. A real-time multiobjective electric energy allocation optimization approach for the smelting process of magnesia[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(1): 51-61.
- [3] Xing-Quan Z, Chun-Lu W, Xin-Chao Z. Combining multi-objective immune algorithm and linear programming for double row layout problem[J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(3): 528-540.
- [4] Schaffer J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms[C]//Proceedings of the first international conference on genetic algorithms and their applications. Psychology Press, 2014: 93-100.
- [5] Corne D W, Jerram N R, Knowles J D, et al. PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization[C]//Proceedings of the 3rd annual conference on genetic and evolutionary computation. 2001: 283-290.
- [6] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm[J]. TIK-report, 2001, 103.

- [7] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.
- [8] Farina M, Amato P. On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems[C]//2002 annual meeting of the North American fuzzy information processing society proceedings. NAFIPS-FLINT 2002 (Cat. No. 02TH8622). IEEE, 2002: 233-238.
- [9] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271.
- [10] Emmerich M, Naujoks B. Metamodel Assisted Multiobjective Optimisation Strategies and their Application[J]. *Adaptive computing in design and manufacture VI*, 2004: 249.
- [11] Knowles J. ParEGO: A hybrid algorithm with on-line landscape approximation for expensive multiobjective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(1): 50-66.
- [12] Inselberg A, Dimsdale B. Parallel coordinates: a tool for visualizing multi-dimensional geometry[C]//Proceedings of the first IEEE conference on visualization: visualization90. IEEE, 1990: 361-378.
- [13] Obayashi S, Sasaki D. Visualization and data mining of Pareto solutions using self-organizing map[C]//Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Second International Conference, EMO 2003, Faro, Portugal, April 8-11, 2003. Proceedings 2. Springer Berlin Heidelberg, 2003: 796-809.
- [14] Purshouse R C, Fleming P J. On the evolutionary optimization of many conflicting objectives[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 770-784.
- [15] Ishibuchi H, Tsukamoto N, Nojima Y. Evolutionary many-objective optimization: A short review[C]//2008 IEEE congress on evolutionary computation (IEEE world congress on computational intelligence). IEEE, 2008: 2419-2426.
- [16] Li K, Deb K, Zhang Q, et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 19(5): 694-716.
- [17] Ikeda K, Kita H, Kobayashi S. Failure of Pareto-based MOEAs: Does non-dominated really mean near to optimal?[C]//Proceedings of the 2001 congress on evolutionary computation (IEEE Cat. No. 01TH8546). IEEE, 2001, 2: 957-962.
- [18] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2007, 4403: 5.
- [19] Singh H K, Isaacs A, Ray T. A Pareto corner search evolutionary algorithm and dimensionality reduction in many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2011, 15(4): 539-556.
- [20] Dai C, Wang Y, Ye M. A new evolutionary algorithm based on contraction method for many-objective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 245: 191-205.
- [21] Xiang Y, Zhou Y, Li M, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 21(1): 131-152.
- [22] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(2): 331-345.
- [23] Liu Y, Zhu N, Li K, et al. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2020, 509: 376-399.
- [24] Laumanns M, Thiele L, Deb K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization[J]. *Evolutionary Computation*, 2002, 10(3): 263-282.
- [25] Yang S, Li M, Liu X, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(5): 721-736.
- [26] Zou X, Chen Y, Liu M, et al. A new evolutionary algorithm for solving many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, 38(5): 1402-1412.
- [27] He Z, Yen G G, Zhang J. Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(2): 269-285.
- [28] Köppen M, Yoshida K. Substitute distance assignments in NSGA-II for handling many-objective optimization problems[C]//Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 4th International Conference, EMO 2007, Matsushima, Japan, March 5-8, 2007. Proceedings 4. Springer Berlin Heidelberg, 2007: 727-741.
- [29] Adra S F, Fleming P J. Diversity management in evolutionary many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2010, 15(2): 183-195.
- [30] Li M, Yang S, Liu X. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(3): 348-365.
- [31] Cheng J, Yen G G, Zhang G. A many-objective evolutionary algorithm with enhanced mating and environmental selections[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(4): 592-605.
- [32] Liu X F, Zhan Z H, Gao Y, et al. Coevolutionary particle swarm optimization with bottleneck objective learning strategy for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(4): 587-602.
- [33] Chen H, Cheng R, Wen J, et al. Solving large-scale many-objective optimization problems by covariance matrix adaptation evolution strategy with scalable small subpopulations[J]. *Information Sciences*, 2020, 509: 457-469.
- [34] Xue Y, Li M, Liu X. An effective and efficient evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2022, 617: 211-233.
- [35] Gu Q, Liu Y, Chen L, et al. An improved competitive particle swarm optimization for many-objective optimization problems[J]. *Expert Systems with Applications*, 2022, 189: 116118.
- [36] Shen J, Wang P, Dong H, et al. A multistage evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2022, 589: 531-549.



- [37] Li B, Li J, Tang K, et al. Many-objective evolutionary algorithms: A survey[J]. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 2015, 48(1): 1-35.
- [38] Brockhoff D, Zitzler E. Objective reduction in evolutionary multiobjective optimization: Theory and applications[J]. *Evolutionary Computation*, 2009, 17(2): 135-166.
- [39] Saxena D K, Duro J A, Tiwari A, et al. Objective reduction in many-objective optimization: Linear and nonlinear algorithms[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2012, 17(1): 77-99.
- [40] Guo X, Wang Y, Wang X. Using objective clustering for solving many-objective optimization problems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013.
- [41] Li M, Yang S, Liu X. Bi-goal evolution for many-objective optimization problems[J]. *Artificial Intelligence*, 2015, 228: 45-65.
- [42] Zhang X, Tian Y, Cheng R, et al. An efficient approach to nondominated sorting for evolutionary multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 19(2): 201-213.
- [43] Zhang X, Tian Y, Jin Y. Approximate non-dominated sorting for evolutionary many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2016, 369: 14-33.
- [44] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired coevolutionary algorithms for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2012, 17(4): 474-494.
- [45] Zhang X, Tian Y, Jin Y. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 19(6): 761-776.
- [46] Bandyopadhyay S, Mukherjee A. An algorithm for many-objective optimization with reduced objective computations: A study in differential evolution[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 19(3): 400-413.
- [47] Chen H, Tian Y, Pedrycz W, et al. Hyperplane assisted evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(7): 3367-3380.
- [48] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731.
- [49] Hughes E J. Evolutionary many-objective optimisation: many once or one many?[C]//2005 IEEE congress on evolutionary computation. IEEE, 2005, 1: 222-227.
- [50] Hughes E J. MSOPS-II: A general-purpose many-objective optimiser[C]//2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2007: 3944-3951.
- [51] Asafuddoula M, Ray T, Sarker R. A decomposition based evolutionary algorithm for many objective optimization with systematic sampling and adaptive epsilon control[C]//Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 7th International Conference, EMO 2013, Sheffield, UK, March 19-22, 2013. Proceedings 7. Springer Berlin Heidelberg, 2013: 413-427.
- [52] Li K, Deb K, Zhang Q, et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 19(5): 694-716.
- [53] Asafuddoula M, Ray T, Sarker R. A decomposition-based evolutionary algorithm for many objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 19(3): 445-460.
- [54] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired co-evolutionary algorithms using weight vectors[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 243(2): 423-441.
- [55] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [56] He Z, Yen G G. Many-objective evolutionary algorithms based on coordinated selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 21(2): 220-233.
- [57] Cai X, Yang Z, Fan Z, et al. Decomposition-based-sorting and angle-based-selection for evolutionary multiobjective and many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 47(9): 2824-2837.
- [58] Jiang S, Yang S. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 329-346.
- [59] Sun Y, Xue B, Zhang M, et al. A new two-stage evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(5): 748-761.
- [60] Liu H L, Gu F, Zhang Q. Decomposition of a multiobjective optimization problem into a number of simple multiobjective subproblems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(3): 450-455.
- [61] Liu H L, Chen L, Zhang Q, et al. Adaptively allocating search effort in challenging many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(3): 433-448.
- [62] Elarbi M, Bechikh S, Gupta A, et al. A new decomposition-based NSGA-II for many-objective optimization[J]. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics: systems*, 2017, 48(7): 1191-1210.
- [63] Ma L, Huang M, Yang S, et al. An adaptive localized decision variable analysis approach to large-scale multiobjective and many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 52(7): 6684-6696.
- [64] Li G, Wang G G, Xiao R B. A novel adaptive weight algorithm based on decomposition and two-part update strategy for many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2022, 615: 323-347.
- [65] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search[C]//PPSN. 2004, 4: 832-842.
- [66] Coello C A C, Cortés N C. Solving multiobjective optimization problems using an artificial immune system[J]. *Genetic programming and evolvable machines*, 2005, 6: 163-190.
- [67] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271.

- [68] Hansen M P, Jaszkiewicz A. Evaluating the quality of approximations to the non-dominated set[M]. IMM, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 1994.
- [69] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 181(3): 1653-1669.
- [70] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(1): 45-76.
- [71] García I C, Coello C A C, Arias-Montano A. MOPSOhv: A new hypervolume-based multi-objective particle swarm optimizer[C]//2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). IEEE, 2014: 266-273.
- [72] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(4): 609-622.
- [73] Sun Y, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(2): 173-187.
- [74] Hansen M P, Jaszkiewicz A. Evaluating the quality of approximations to the non-dominated set[M]. IMM, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 1994.
- [75] Phan D H, Suzuki J. R2-IBEA: R2 indicator based evolutionary algorithm for multiobjective optimization[C]//2013 IEEE congress on evolutionary computation. IEEE, 2013: 1836-1845.
- [76] Gómez R H, Coello C A C. MOMBI: A new metaheuristic for many-objective optimization based on the R2 indicator[C]//2013 IEEE congress on evolutionary computation. IEEE, 2013: 2488-2495.
- [77] Hernández Gómez R, Coello Coello C A. Improved metaheuristic based on the R2 indicator for many-objective optimization[C]//Proceedings of the 2015 annual conference on genetic and evolutionary computation. 2015: 679-686.
- [78] Wang H, Jiao L, Yao X. Two\_Arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 19(4): 524-541.
- [79] Li B, Tang K, Li J, et al. Stochastic ranking algorithm for many-objective optimization based on multiple indicators[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(6): 924-938.
- [80] Liu Y, Gong D, Sun J, et al. A many-objective evolutionary algorithm using a one-by-one selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2689-2702.
- [81] Li M, Yao X. Quality evaluation of solution sets in multiobjective optimisation: A survey[J]. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 2019, 52(2): 1-38.
- [82] Ishibuchi H, Masuda H, Tanigaki Y, et al. Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance[C]//Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 8th International Conference, EMO 2015, Guimarães, Portugal, March 29--April 1, 2015. Proceedings, Part II 8. Springer International Publishing, 2015: 110-125.
- [83] Van Veldhuizen D A. Multiobjective evolutionary algorithms: classifications, analyses, and new innovations[M]. Air Force Institute of Technology, 1999.
- [84] Wu J, Azarm S. Metrics for quality assessment of a multiobjective design optimization solution set[J]. *J. Mech. Des.*, 2001, 123(1): 18-25.
- [85] Li M, Yang S, Liu X. A performance comparison indicator for Pareto front approximations in many-objective optimization[C]//Proceedings of the 2015 annual conference on genetic and evolutionary computation. 2015: 703-710.
- [86] Cai X, Xiao Y, Li M, et al. A grid-based inverted generational distance for multi/many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 25(1): 21-34.
- [87] Cai X, Xiao Y, Li Z, et al. A kernel-based indicator for multi/many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 26(4): 602-615.
- [88] Smola A, Gretton A, Song L, et al. A Hilbert space embedding for distributions[C]//Algorithmic Learning Theory: 18th International Conference, ALT 2007, Sendai, Japan, October 1-4, 2007. Proceedings 18. Springer Berlin Heidelberg, 2007: 13-31.
- [89] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization[M]. Springer London, 2005.
- [90] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506.
- [91] Cheng R, Li M, Tian Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3: 67-81.
- [92] Li M, Yang S, Liu X. A test problem for visual investigation of high-dimensional multi-objective search[C]//2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). IEEE, 2014: 2140-2147.
- [93] Li M, Grosan C, Yang S, et al. Multiline distance minimization: A visualized many-objective test problem suite[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(1): 61-78.
- [94] Fieldsend J E, Chugh T, Allmendinger R, et al. A visualizable test problem generator for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 26(1): 1-11.
- [95] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2007, 4403: 5.
- [96] Corne D W, Knowles J D. Techniques for highly multiobjective optimisation: some nondominated points are better than others[C]//Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation. 2007: 773-780.
- [97] Sülflow A, Drechsler N, Drechsler R. Robust multi-objective optimization in high dimensional spaces[C]//Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 4th International Conference, EMO

- 2007, Matsushima, Japan, March 5-8, 2007. Proceedings 4. Springer Berlin Heidelberg, 2007: 715-726.
- [98] 刘广. 高维多目标优化的可视化技术研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2014.  
Liu G. Study on Visualization of Many-objective Optimization[D]. Chongqing University, 2014
- [99] Li M, Zhen L, Yao X. How to read many-objective solution sets in parallel coordinates [educational forum][J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 88-100.
- [100] Inselberg A. The plane with parallel coordinates[J]. The visual computer, 1985, 1: 69-91.
- [101] Andrews D F. Plots of high-dimensional data[J]. Biometrics, 1972: 125-136.
- [102] Zhen L, Li M, Cheng R, et al. Adjusting parallel coordinates for investigating multi-objective search[C]//Simulated Evolution and Learning: 11th International Conference, SEAL 2017, Shenzhen, China, November 10 - 13, 2017, Proceedings 11. Springer International Publishing, 2017: 224-235.
- [103] Zhen L, Li M, Peng D, et al. Objective reduction for visualising many-objective solution sets[J]. Information Sciences, 2020, 512: 278-294.
- [104] Chernoff H. The use of faces to represent points in k-dimensional space graphically[J]. Journal of the American statistical Association, 1973, 68(342): 361-368.
- [105] Pickett R M, Grinstein G G. Iconographic displays for visualizing multidimensional data[C]//Proceedings of the 1988 IEEE Conference on Systems, Man, and Cybernetics. 1988, 514: 519.
- [106] Shneiderman B. Tree visualization with tree-maps: 2-d space-filling approach[J]. ACM Transactions on graphics (TOG), 1992, 11(1): 92-99.
- [107] LeBlanc J, Ward M O, Wittels N. Exploring n-dimensional databases[C]//Proceedings of the First IEEE Conference on Visualization: Visualization90. IEEE, 1990: 230-237.
- [108] Keim D A, Kriegel H P. Visdb: A system for visualizing large databases[J]. ACM SIGMOD Record, 1995, 24(2): 482.
- [109] 张永建. 高维多目标进化算法研究及应用[D]. 哈尔滨工程大学, 2015.  
Zhang Y J. Research on Many-Objective Evolution Algorithms and Their Applications[D]. Harbin Engineering University, 2015.
- [110] Adra S F, Hamody A I, Griffin I, et al. A hybrid multi-objective evolutionary algorithm using an inverse neural network for aircraft control system design[C]//2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2005, 1: 1-8.
- [111] Matos M A, Rocha A M A C, Costa L A. Many-objective optimization of build part orientation in additive manufacturing[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2021, 112: 747-762.
- [112] Dinga C D, Wen Z. Many-objective optimization of energy conservation and emission reduction in China's cement industry[J]. Applied Energy, 2021, 304: 117714.
- [113] Raja B D, Jhala R L, Patel V. Many-objective optimization of shell and tube heat exchanger[J]. Thermal Science and Engineering Progress, 2017, 2: 87-101.
- [114] Fang Y, Liu Q, Li M, et al. Evolutionary many-objective optimization for mixed-model disassembly line balancing with multi-robotic workstations[J]. European Journal of Operational Research, 2019, 276(1): 160-174.
- [115] Cao B, Wang X, Zhang W, et al. A many-objective optimization model of industrial internet of things based on private blockchain[J]. IEEE Network, 2020, 34(5): 78-83.
- [116] Zhang J, Xue F, Cai X, et al. Privacy protection based on many - objective optimization algorithm[J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2019, 31(20): e5342.
- [117] Xiang Y, Zhou Y, Zheng Z, et al. Configuring software product lines by combining many-objective optimization and SAT solvers[J]. ACM Transactions on Software Engineering and Methodology (TOSEM), 2018, 26(4): 1-46.
- [118] Hierons R M, Li M, Liu X, et al. Many-objective test suite generation for software product lines[J]. ACM Transactions on Software Engineering and Methodology (TOSEM), 2020, 29(1): 1-46.
- [119] Matrosov E S, Huskova I, Kasprzyk J R, et al. Many-objective optimization and visual analytics reveal key trade-offs for London's water supply[J]. Journal of Hydrology, 2015, 531: 1040-1053.